Quantum Information Processing

Lecture 3

Second Postulate of Quantum Mechanics

Second Postulate

The continuous-time evolution of a *closed* quantum system is described by the Schrödinger equation:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

where H is a fixed Hermitian operator known as the Hamiltonian.

By solving this differential equation one gets:

$$|\psi(t)\rangle = U(t)\, |\psi(0)\rangle \quad \text{where} \quad U(t) = \exp(-iHt)$$

and $|\psi(0)\rangle$ is the state at $t = 0$. One can check that $U(t)$ is unitary.

We consider only discrete computational steps:

The discrete-time evolution of a *closed* quantum system is described by a unitary transformation U:

$$|\psi'\rangle = U\, |\psi\rangle$$

what unitary operators are natural to consider? In the case of single qubits, it turns out that *any* unitary operator at all can be realized in realistic systems.

Erwin Schrödinger (12 August 1887 – 4 January 1961), was a Nobel Prize-winning Austrian-Irish physicist who developed a number of fundamental results in quantum theory: the Schrödinger equation provides a way to calculate the wave function of a system and how it changes dynamically in time.

در یک سیستم کوانتومی «بسته»، حالت سیستم به گونه‌ای تغییر می‌کند که با استفاده از معادله شرودینگر بیان می‌شود.

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

توجه کنید که این معادله مشتق حالت در لحظه t را بر اساس ضرب یک ماتریس Hermitian ثابت در حالت کنونی بدست می‌آورد. مشتق حالت در واقع تغییرات حالت را را نشان می‌دهد. با استفاده از تغییرات حالت و داشتن حالت کنونی، آنگاه، می‌توان حالت بعدی را بدست آورد.

ماتریس Hermitian ثابت است به این معنی که با زمان تغییر نمی‌کند. یعنی به ازای هر سیستم کوانتومی بسته ما فقط به یک ماتریس نیاز داریم تا تمام تغییرات حالت آن در طول زمان آینده را محاسبه کنیم. به خاطر بیاورید که منظور از ماتریس Hermitian، یک ماتریسی است که خاصیت $H = H^{\dagger}$ را داشته باشد.

البته بدست آوردن این ماتریس کار بسیار سختی است. بخش قابل توجهی از علم فیزیک در قرن بیستم مربوط به بدست آوردن این ماتریس برای سیستم‌های کوانتومی مختلف بوده است. تعیین این ماتریس یک فرایند آزمایشگاهی است که نیازمند جمع‌آوری حجم زیادی از اطلاعات با استفاده از آزمایش و مشاهده سیستم کوانتومی مد نظر است. از نقطه نظر درس ما، نحوه بدست آوردن این ماتریس موضوعیت ندارد. در این درس ما همیشه فرض می‌کنیم که این ماتریس باید Hermitian باشد و آن را به عنوان فرض اولیه و نقطه شروع قبول می‌کنیم.
توجه داشته باشید که معادله فوق می‌تواند حالت سیستم را به صورت پیوسته مشخص کند. در این درس ما بیشتر با حالت گسسته کار می‌کنیم. به این منظور، کافی است که معادله فوق (که یک معادله دیفرانسیل است) را حل کنیم (حل این معادله نیز خارج از توجه این درس است). در صورتی که این کار را انجام دهیم به معادله زیر می‌رسیم:

$$|\psi(t_2)\rangle = e^{-iH\times(t_2-t_1)}|\psi(t_1)\rangle$$

که اگر تفاوت t_1 و t_2 را یک واحد در نظر بگیریم به معادله زیر می‌رسیم:

$$|\psi(t_2)\rangle = e^{-iH\times 1}|\psi(t_1)\rangle$$

که هر لحظه t_1 و t_2 با اختلاف یک را با استفاده عملگر e^{-iH} به یکدیگر مرتبط می‌کند. از طرفی می‌توان اثبات کرد که e^{-iH} یک ماتریس Unitary است. همچنین می‌شود اثبات کرد که به ازای هر ماتریس Unitary، یک ماتریس Hermitian وجود دارد که در فرمول بالا قرار بگیرد و آن را بسازد. به همین دلیل، معمولاً در این درس ما از ماتریس‌های Unitary برای توصیف تغییرات حالت سیستم کوانتومی مد نظر خودمان استفاده می‌کنیم.

در صورتی که علاقه‌مند هستید در این رابطه بیشتر مطالعه کنید، به کتاب مرجع بخش 2.2.2 رجوع کنید.